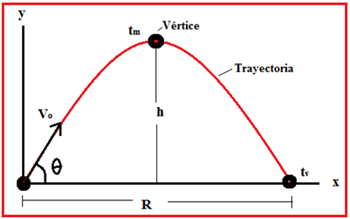
## **Tema 2.3. Esperanza de una Variable Aleatoria Discreta.**

**Motivación del tema.** Cuando lanzamos un proyectil con un ángulo , casi siempre no lo medimos exactamente, en algunas ocasiones lo medimos de más y otras de menos, podemos entonces decir que el ángulo de elevación es una variable aleatoria y es su función de densidad que está dada por la tabla

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

en donde es la frecuencia con aparece el ángulo y así con los demás valores. Por ejemplo, la función de densidad podría ser

la cual indica que el ángulo de 45°=0.7853 es el más frecuente.



En este tema aprenderemos a calcular el valor promedio o esperado del ángulo como

Este concepto de esperanza o valor promedio del ángulo nos sirve para calcular el valor esperado del alcance del proyectil, pues este depende del ángulo. Al estar variando el ángulo , también va a estar variando el alcance, es decir, también es una variable aleatoria y tiene sentido preguntarnos por el valor esperado del alcance, para así saber si el proyectil está alcanzando el objetivo. Como sabemos

Entonces como veremos el valor esperado del alcance del proyectil se calcula como:

Observe que es una variable aleatoria que es función de otra variable aleatoria .

**Definición 1.** Sea una variable aleatoria discreta con función de densidad:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | *…* |
|  |  |  |  | *…* |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | *…* |  |
|  |  |  |  | *…* |  |

**)**

Entonces la ***media*** o la ***esperanza*** o **el valor esperado** de *X*, representado por o o , se define por:

La interpretación de es que debe dejar más o menos el 50% de los datos a su izquierda y el otro 50% de datos a su derecha. También podemos decir que al menos el 75% de los datos están alrededor de él, donde se debe contar cada dato con la frecuencia con que aparece en la función de densidad.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Ejemplo 1.**  Se lanza un par de dados equilibrados. Sean *X* y *Y* las variables aleatoria definidas como *X(a, b) = max(a,b)* y *Y(a,b) = a + b*. Utilizando las distribuciones de y , calcular sus esperanzas .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Solución.**

Utilizando la distribución de Y, se calcula la esperanza de Y como:

**Ejemplo 2.**  Sean *X* y *Y* variables aleatorias con las siguientes distribuciones

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 6 | 10 |
|  | 0.2 | 0.2 | 0.5 | 0.1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -8 | -2 | 0 | 3 | 7 |
|  | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.3 | 0.1 |

Calcular E(X) y E(Y).

**Solución.**

**Ejemplo 3.**  Suponga que una moneda equilibrada se lanza 6 veces. Se puede mostrar que el número de caras ocurre con probabilidad de la siguiente manera:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Calcule el número esperado E de caras.

**Solución.** El espacio muestral es de 64 porque en cada lanzamiento tenemos 2 opciones *H* o *T*, entonces en los 6 lanzamientos vamos a tener elementos en el espacio muestral. Por ejemplo, para *,* se calcula como sigue:

Entonces la esperanza se calcula como:

**Teorema 1. Propiedades de la Esperanza.** Sea *X* una variable aleatoria y sea *k* un número real. Entonces

*y*

**Demostración.** Demostraremos la fórmula si es una variable aleatoria con función de densidad

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | *…* |  |
|  |  |  |  | *…* |  |

entonces la función de densidad de la variable aleatoria es

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | *…* |  |
|  |  |  |  | *…* |  |

La tabla es así porque, por ejemplo, , observe como se pasa de la variable aleatoria a la variable aleatoria simplemente cancelando , entonces su esperanza es

**Ejercicios.**

1. ¿Cuál es el número esperado de puntos que aparecerá en 3 lanzamientos sucesivos de un dado balanceado?

Respuesta: 10.5

1. Encuentre la esperanza de una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad está dada por

Ayuda: Si , multiplique por y haga una resta.

Respuesta: 2.

1. Demuestre que (a) , (b) .

Ayuda: Las funciones de densidad de y son, ¿por qué?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

1. Una variable aleatoria tiene función de densidad

Encuentre (a) , (b)

Respuesta: (a) 1, (b) 7.

**Esperanza y Juegos de Azar.**  Frecuentemente un juego de azar consiste en resultados ocurriendo con probabilidades respectivas . Supongamos que la compensación a un jugador es por el resultado donde una

* positiva representa una ganancia para el jugador
* negativa representa una pérdida.

Entonces el valor esperado *E* del juego para el jugador es la cantidad

La asignación de *wi* a *ai* puede considerarse como una variable aleatoria X y la esperanza E(X) de X es el valor esperado del juego. El juego es

* *justo* si *E = 0*,
* *favorable* al jugador si *E* es positivo
* *desfavorable* al jugador si *E* es negativo.

**Ejemplo 4.** Se lanza un dado equilibrado. Si sale 2, 3 o 5, el jugador gana ese número de dólares, pero si sale el 1, 4 o 6, el jugador pierde ese número de dólares. Las compensaciones posibles para el jugador y sus probabilidades respectivas son las siguientes:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 5 | -1 | -4 | -6 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Los números negativos -1, -4, -6 se refieren al hecho de que el jugador pierde cuando ocurre 1, 4 o 6. Entonces el valor esperado *E* del juego es

Por tanto, el juego es desfavorable para el jugador, porque el valor esperado *E* es negativo.

**Observación 1. La Esperanza como un Promedio.** Supongamos que X es una variable aleatoria con *n* valores distintos y consideremos que cada ocurre con la misma probabilidad . En consecuencia,

Este es precisamente el valor *promedio* o *media* de los números . Por esta razón *E(X)* se denomina el promedio o *media* de la variable aleatoria X.

**Ejercicios.**

1. Un jugador lanza dos monedas equilibradas, el jugador gana $2 si ocurren dos caras y $1 si ocurre una cara. Por otra parte, el jugador pierde $3 si no ocurren caras. (a) Encuentre el valor esperado del juego, (b) ¿es el juego justo?

Respuesta: (a) $0.25. (b) el juego es favorable.

1. Un jugador lanza dos monedas equilibradas. El jugador gana $3 si ocurren dos caras y $1 si ocurre una cara. Para que el juego sea justo, ¿cuánto debe perder el jugador?

Respuesta: $5

1. Una lotería ofrece 200 premios de $5, 20 premios de $25 y 5 premios de $100. Suponiendo que se van a vender 10000 boletos, ¿cuál es el precio justo que se debe pagar por uno de ellos?

Ayuda: Termine de llenar la tabla

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| dólares | 5 | 25 |  |  |
|  | 0.02 |  |  |  |

Respuesta: 20 centavos.

**Definición 3. Funciones de una Variable Aleatoria.** Sea una variable aleatoria y una función entonces *X* y se pueden combinar para formar una nueva variable aleatoria como .

¿Cómo se evalúa en una ? Simplemente en donde esté la cambiamos por

o

**Ejemplo 5.** Si , o entonces las variables aleatorias que se forman son:

Supongamos que la variable aleatoria está definida para el lanzamiento de una moneda

y es la variable aleatoria . ¿Cuánto vale y ?

**Solución.** Evaluamos en en la fórmula de para obtener

Hacemos lo mismo para y obtenemos:

Observe que el recorrido de la variable aleatoria es . ¿Cuál es la función de densidad de ?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Esto es así porque

**Teorema 2.** Sea *X* una variable aleatoria discreta con función de densidad

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | *…* |  |
|  |  |  |  | *…* |  |

y entonces

**Ejemplo 6.** Sea *X* la variable aleatoria con función masa de probabilidad

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *2* | *4* | *6* | *8* |
|  | *0.1* | *0.2* | *0.3* | *0* |

Calcular

**Solución.** Por la fórmula del teorema 2.

**Ejercicios.**

1. Sea una variable aleatoria con función de densidad

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 1 | 2 |
|  | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

1. Encuentre la función de densidad de las variables aleatorias , (b) su valor esperado.

Respuesta: (a)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 4 |
|  | 0.7 | 0.3 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | -0.8414 | 0.8414 | 0.9092 |
|  | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

1. Si o las variables aleatorias que se forman son:

Supongamos que la variable aleatoria está definida para el lanzamiento de una moneda

1. Encuentre la función de densidad de las , (b) encuentre sus esperanzas.

Respuesta: (a)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. ,
2. Un cliente potencial para una póliza de seguro por $20000 dólares tiene una casa en un área que, de acuerdo con la experiencia, puede sufrir una pérdida total en un año con una probabilidad de 0.001 y una perdida del 50% con una probabilidad de 0.01. ¿Qué prima tendría que cobrar la compañía de seguros por una póliza anual, para salir a mano con todas las pólizas de $20000 de este tipo, ignorando todas las otras pérdidas parciales?

Ayuda:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 20000 | 10000 |
|  | 0.001 | 0.01 |

Respuesta: $120.

**Tema 2.2. Esperanza de una Variable Aleatoria Continúa.**

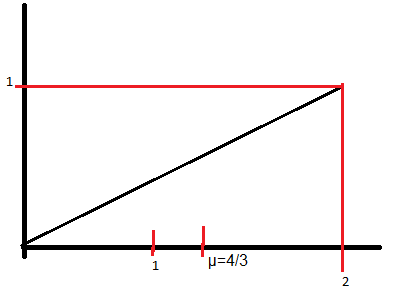
**Definición 1.-**  El **valor esperado o esperanza E(X) o o**  de una variable aleatoria continua X con función de densidad está definida como

También si entonces:

**Ejemplo 1.-** Sea X una variable aleatoria con función de densidad.

Calcular E(x).

**Solución.**



Valor promedio

**Ejemplo 2.-** Encuentre la esperanza E(X) de la variable aleatoria X cuya función de distribución acumulada es:

**Solución.** Calculamos la función de densidad como la derivada de

Entonces

**Definición 2.-** Sea X: S→R una variable aleatoria y sea una función real entonces definimos la variable aleatoria Y=(X) como

**Ejemplo 3.** Un proyectil se lanza con un ángulo de elevación y es una variable aleatoria cuya función de densidad es:

Aquí se entiende que la variable aleatoria ángulo toma solamente valores en el intervalo , es decir, ángulos entre 30° y 60°, entonces el alcance del proyectil

es una variable aleatoria. Calcule el valor esperado del alcance del proyectil.

**Solución.**

**Ejemplo 4.-** Calcular el valor esperado de la variable aleatoria.

Si X es la variable aleatoria con función de densidad.

**Solución.**

donde hemos hecho el cambio de variable.

**Ejercicios.**

1. En el ejemplo 3 calcular el valor esperado del ángulo.

Respuesta: .

1. La radiación solar total diaria, en el mes de octubre, en una ciudad tiene una función de densidad dada como

Las mediciones vienen en cientos de calorías. Calcula la radiación solar diaria esperada para el mes de octubre.

Respuesta: 4

1. Suponga una variable aleatoria con la función de densidad
2. Determine el valor de que hace de una función de densidad, (b) calcular la media de .

Ayuda: integrar por partes.

Respuesta: (a) 4, (b) 1.

1. Si es una variable aleatoria continua con función de densidad , demuestre que .

Ayuda: empiece con